

Екзаменул уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Варианта демонстративэ материалелор де апречиере а куноштинцелор пентру реализаря ын анул 2019 экзаменулуй уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Експликаций ла варианта демонстративэ а материалелор де апречиере пентру ЕУС ла математикэ анулуй 2019

Варианта демонстративэ есте дестинатэ пентру а да о ынкипуире деспре структура виитоарелор материале де апречиере, деспре кантитатя ынсэрчинэрилор, деспре форма лор ши нивелул де комплекситате.

Ынсэрчинэриле вариантэй демонстративе ну рефлектэ тоате ынтребэриле концинутулуй, каре пот фи инклузе ын материалеле де апречиере ын анул 2019. Структура лукрэрий есте датэ ын спечификацие, яр листа ынтребэрилор – ын кодификаторий элементелор концинутулуй ши черинцелор кэтре нивелул прегэтирей а абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт ла реализаря экзаменулуй уник де стат анулуй 2019 ла математикэ.

Лукраря де экзаминаре есте форматэ дин доуэ пэрць, каре диферэ ын концинут, комплекситате ши нумэрул де ынсэрчинэрь. Индичиул стабилит фиекэрей пэрць а лукрэрий есте форма ынсэрчинэрилор:

– партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 1–11) ку рэспунс скурт;
партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 12–15) ку рэспунс скурт ши шасе ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 16–21) ку рэспунс десфэшурат.

Дупэ нивелул де комплекситате ынсэрчинэриле се репартизиязэ ын фелул урмэтор: ынсэрчинэриле 1–11 ау нивел де базэ, ынсэрчинэриле 12–19 – нивел ридикат, ынсэрчинэриле 20 ши 21 се реферэ ла нивелул ыналт де комплекситате.

Ынсэрчинэриле примей пэрць сынт дестинате пентру детерминаря компетенцелор математиче але абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт, че реализязэ програмеле ынвэцэмынтулуй женерал медиу (комплет) ла нивел де базэ.

Ынсэрчинаря ку рэспунс скурт (1-15) се сокоате ындеплинитэ, дакэ ын формуларул ку рэспунсурь № 1 есте фиксат рэспунсул корект ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Ынсэрчинэриле 16–21 ку рэспунс десфэшурат, динтре каре патру ынсэрчинэрь ку нивел ридикат ши доуэ ынсэрчинэрь ку нивел ыналт де комплекситате, сынт дестинате пентру о диференциере май пречисэ а абитуриенцилор институциилор де ынвэцэмынт супериор.

Резолваря коректэ а фиекэрей дин ынсэрчинэриле 1-15 есте естиматэ ку ун пункт.

Резолваря коректэ фиекэрей дин ынсэрчинэриле 16 - 17 есте естиматэ ку 2 пункте; 18 ши 19 — 3 пункте; 20 ши 21 — 4 пункте. Пунктажул максимал примар пентру ындеплиниря лукрэрий – 33 пункте.

Пентру фиекаре ынсэрчинаре ку рэспунс десфэшурат, инклусэ ын варианта демонстративэ, се пропуне о резолваре дин челе посибиле. Критерииле презентате де евалуаре пермит сэ ынцележець черинцеле привинд деплинэтата ши коректитудиня резолвэрилор.

Варианта демонстративэ а материалелор де апречиере, системул де евалуаре, спецификация ши кодификаторий вор ажута сэ елабораць стратегия де прегэтире кэтре ЕУС ла математикэ.

Инструкциунь ла ындеплиниря лукрэрий

Лукраря де экзаминаре есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць, инклузынд ын сине 21 ынсэрчинэрь.

Партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь ла нивел де базэ де комплекситате ку рэспунс скурт.

Партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат де комплекситате ку рэспунс скурт ши 6 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат ши ыналт де комплекситате ку рэспунс десфэшурат.

Ла ындеплиниря лукрэрий де экзаминаре ла математикэ се атрибуе 3 оре 55 минуте (235 минуте).

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 1–15 се скриу ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Нумереле скриець ын кымпуриле рэспунсурипор ын текстул лукрэрий, яр апой ле трансфераць ын формуларул ку рэспунсурь №1.

Рэспунс: -0,8.

Ла ындеплиниря ынсэрчинэрипор 16–21 се чере де скрис резолваря комплетэ ши рэспунсул ын формуларул ку рэспунсурь № 2.

Тоате формулареле ЕУС се ындеплинеск ку чернялэ нягрэ апринсэ.

Се пермите фолосиря пиксурипор капиларе, ку жел сау ку пеницэ. Ла ындеплиниря ынсэрчинэрипор се поате фолоси макулаторул. Ынскриериле ын макулатор ну се яу ын консидерацие ла апречиеря лукрэрий.

Пунктеле, акумулате де кэтре Думнявоастрэ пентру ынсэрчинэриле ындеплините, се сумязэ. Стэруици-вэ сэ ындеплиниць кыт май мулте ынсэрчинэрь ши сэ акумулаць чел май маре пунктаж.

Вэ дорим сукчес!

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 1–11 есте нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын **ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ № 1 ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну требуе де скрис.**

Партя 1

1. Челе май симпле проблеме

Конформ планулуй тарифар «Ка о зи» компания де комуникаций челуларе ретраже ын фиекаре сярэ дин контул абонатулуй 16 рубле. Дакэ пе конт сынт май пуцин де 16 рубле, атунч ын диминяца урмэтоаре нумэрул есте блокат пынэ кынд контул ва фи реынкэркат. Астэзь диминяцэ Лиза авя пе конт 300 руб. Кыте зиле (инклусив астэзь) ва путя фолоси телефонул фэрэ а комплета контул?

Резолваре.

$300/16 = 18,75$, ынсэ аша кум 75% дин 16 рубле (адикэ 12 рубле) ну ажунг, пентру а плэти зиуа комуникэрий – конклюдем, кэ Лизей ый вор ажунже баний ачештя пе 18 zile.

Рэспунс: 18.

2. Проблеме ку проченте

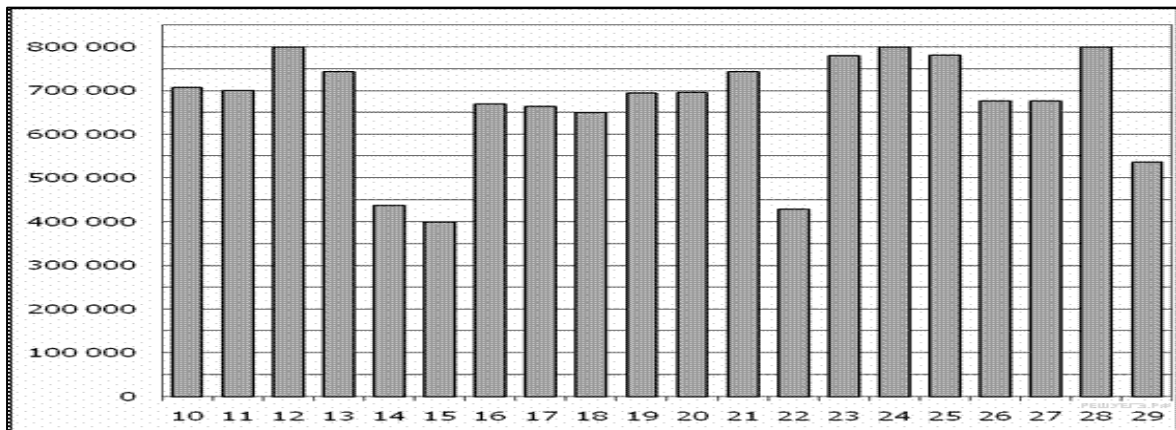
Ын орашул N локуеск 200 000 де локуиторь. Динтре каре 15% копий ши адолесченць. Динтре локуиторий адулць 45% ну лукрызэ (пенсионарь, студенць, господине, етч.). Кыць локуиторь адулць лукрызэ?

Резолваре.

Нумэрул де копий дин орашул N алкэтуеште $200\,000 \cdot 0,15 = 30\,000$. Нумэрул де адулць $200\,000 - 30\,000 = 170\,000$ оамень. Динтре ей ну лукрызэ $170\,000 \cdot 0,45 = 76\,500$ оамень. Деч, лукрызэ $170\,000 - 76\,500 = 93\,500$ де локуиторь.

Рэспунс: 93 500.

3. Читиря графичелор ши диаграмелор



Пе диаграмэ се аратэ нумэрул де визитаторь ай сите-улуй РИА Ноутэць пентру тоате zileле де пе 10 пынэ пе 29 ноембрие анул 2009. Пе оризонтал се индикэ zileле луний, пе вертикал – нумэрул де визитаторь ай сите-улуй пентру зиуа датэ. Детерминаць дупэ диаграмэ, пе че датэ нумэрул де визитаторь ай сите-улуй РИА Ноутэць а фост чел май мик пентру периода индикатэ.

Резолваре.

Дин диаграмэ се веде, кэ чей май пуцинь визитаторь ау фост пе 15 ноембрие. (везь дес.).

Рэспунс: 15.

4. Лукрул ку формулеле.

Акчелерация чентрипетэ ла мишкаря пе чиркумферинць (ын m/s^2) поате фи калкулатэ дупэ формула $a = \omega^2 R$ унде ω — витеза унгуларэ (ын s^{-1}), яр R — раза чиркумферинцей. Фолосинд ачастэ формулэ, афлаць R (ын метри), дакэ витеза унгуларэ есте егалэ ку $3 s^{-1}$, яр акчелерация чентрипетэ есте егалэ ку $45 m/s^2$.

Резолваре.

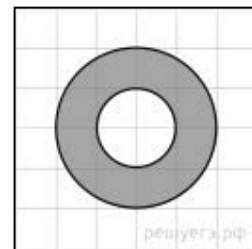
Экспримэм раза чиркумферинцей: $R = \frac{a}{\omega^2}$. Ынлокуим валориле вариабилелор a ши ω :

$$R = \frac{45}{3^2} = \frac{45}{9} = 5.$$

Рэспунс: 5.

5. Реца патратэ, планул де координате.

Пе о фоае ын пэтрэцеле сынт десенате доуэ черкурь. Ария черкулуй интериор есте егалэ ку 51. Афлаць ария фигурий хашурате.



Резолваре.

Арииле черкурилор се рапортэ ка пэтрэтеле разелор лор. Прекум раза черкулуй маре есте де доуэ орь май маре декыт раза черкулуй мик, ария черкулуй маре де патру орь есте май маре декыт ария челуй мик. Прин урмаре, есте егалэ ку 204. Ария фигурий хашурате есте егалэ ку диференца ариилор черкурилор: $204 - 51 = 153$.

Ответ: 153.

6. Елементе але теорией пробабилитэцилор

Конферинца штиинцификэ се петрече 5 zile. Де тот с-ау планификат 75 рапоарте – примеле трей zile кыте 17 рапоарте, челелалте ау фост репартизате егал ынтре зиуа а патра ши а чинча. Ординя рапоартелор се детерминэ прин тражере ла сорць. Каре есте пробабилитатя, кэ рапортул професорулуй М. ва фи програмат ын ултима зи а конферинцей?

Резолваре.

Примеле трей zile се вор чити 51 де рапоарте, ын ултимиле доуэ zile се програмязэ 24 рапоарте. Прин урмаре, 12 рапоарте сынт програмате пентру ултима зи. Деч, пробабилитатя, кэ рапортул професорулуй М. ва фи програмат

ын ултима зи а конферинцей, есте егалэ ку $\frac{12}{75} = 0,16$.
Рэспунс: 0,16.

7. Екуаций симпле

Гэсиць рэдэчина екуацией $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

Резолваре.

Фолосим формула $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Презентэм ынкэ о резолваре:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Рэспунс: 2.

8. Планиметрия : проблеме , легате ку унгиуриле.

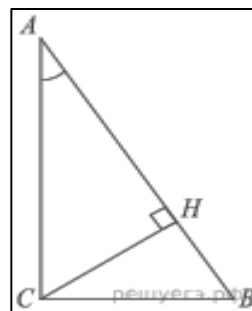
Ын триунгиул ABC унгиул C есте егал ку 90° , CH – ынэллиция, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Гэсиць AN.

Резолваре.

Авем:

$$AN = AC \cos A = AB \cos^2 A = AB \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{25}} = 13 \cdot \frac{25}{26} = 12,5.$$

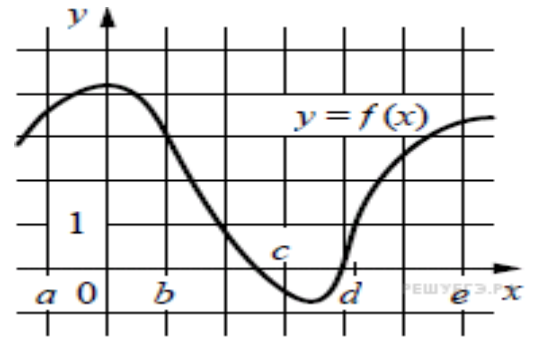
Рэспунс: 12,5.



9. Анализа графичелор ши диаграмелор.

Пе десен есте дат графикул функцией $y = f(x)$.

Нумереле a, b, c, d ши e ымпарт акса x ын патру интервале. Фолосинд графикул, пунець ын кореспундере фиекэруй интервал карактеристика функцией сау дериватей ей.



ПУНКТЕЛЕ

ВАЛОРИЛЕ ДЕРИВАТЕЙ

- А) $(a; b)$ 1) деривата есте негативэ пе тот интервалул
- Б) $(b; c)$ 2) деривата есте позитивэ ла ынчепутул интервалулуй ши негативэ ла сфыршитул интервалулуй
- В) $(c; d)$ 3) функция есте негативэ ла ынчепутул интервалулуй ши позитивэ ла сфыршитул интервалулуй
- Г) $(d; e)$ 4) деривата есте позитивэ пе тот интервалул

Скриець ын рэспунс цифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	Б	В	Г

Резолваре.

Дакэ функция креште, атунч деривата есте позитивэ ши инверс.

Пе интервалул $(a;b)$ деривата есте позитивэ ла ынчепутул интервалулуй ши негативэ ла сфыршит, деоарече функция ла ынчепут креште, яр апой дескреште.

Пе интервалул $(b;c)$ деривата есте негативэ, деоарече функция дескреште.

Пе интервалул $(c;d)$ функция есте негативэ ла ынчепутул интервалулуй ши позитивэ ла сфыршитул интервалулуй.

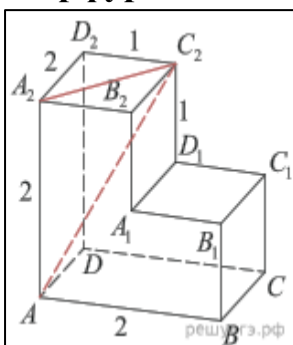
Пе интервалул $(d;e)$ деривата есте позитивэ, деоарече функция креште.

Ын аша мод, примим кореспонденца А — 2, Б — 1, В — 3 ши Г — 4.

Рэспунс: 2134.

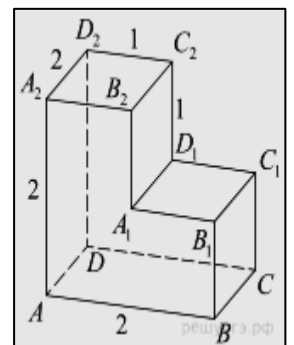
10. Стереометрия.

Пе десен есте дат ун полиедру, тоате унгюриле диедре але полиедрулуй сынт дрепте. Гэсиць дистанца динтре вырфуриле А ши C_2 .



Резолваре.

Прекэутэм триунгюл дрептунгик, дупэ теорема луй Питогаора



$$AC_2 = \sqrt{AA_2^2 + A_2C_2^2} = \sqrt{AA_2^2 + A_2D_2^2 + D_2C_2^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

Рэспунс: 3

11. Алежеря опциуний оптимале

Пентру транспортаря а 45 тоне де ынкэркэтурэ ла 1300 км се поате де фолосит де сервичиеле унея дин челе трей фирме де транспортаре. Костул транспортэрий ши капачитатя де ридикаре а аутомобилелор пентру

Фиекаре транспортатор сынт индикате ын табелэ. Кыте рубле ва требуи де плэтит пентру чя май ефтинэ транспортаре?

Транспортаторул	Костул транспортэрий ку ун аутомобил (руб. ла 100 км)	Капачитатя де ридикаре а аутомобилелор (тоне)
<i>A</i>	3200	3,5
<i>B</i>	4100	5
<i>B</i>	9500	12

Резолваре.

Прекэутэм доуэ опциунь.

Пентру транспортаря а 45 тоне де ынкэркэтурэ транспортаторул *A* аре невое де 13 аутомобиле. Прецул транспортэрий ку фиекаре динтре еле алкэтуеште $32 \cdot 1300 = 41\,600$ руб. Костул комплет ал транспортэрий $41\,600 \cdot 13 = 540\,800$ руб.

Пентру транспортаря а 45 тоне де ынкэркэтурэ транспортаторул *B* аре невое де 9 аутомобиле. Прецул транспортэрий ку фиекаре динтре еле алкэтуеште $41 \cdot 1300 = 53\,300$ руб. Костул комплет ал транспортэрий $53\,300 \cdot 9 = 479\,700$ руб.

Пентру транспортаря а 45 тоне де ынкэркэтурэ транспортаторул *B* аре невое де 4 аутомобиле. Прецул транспортэрий ку фиекаре динтре еле алкэтуеште $95 \cdot 1300 = 123\,500$ руб. Костул комплет ал транспортэрий $123\,500 \cdot 4 = 494\,000$ руб.

Прецул пентру чя май ефтинэ транспортаре есте 479 700 руб.

Ответ: 479 700.

Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь № 1

ПАРТЯ 2

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 12–15 требуе сэ фие нумэр ын трег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын формуларул ку рэспунсурь № 1 ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну требуе де скрис.

12. Калкуле ши трансформэрь

Гэсиць $\operatorname{tg}^2 \alpha$, дакэ $5\sin^2 \alpha + 13\cos^2 \alpha = 6$.

Резолваре.

Ефектуэм трансформэриле:

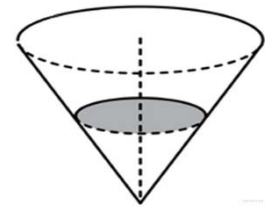
$$5\sin^2 \alpha + 13\cos^2 \alpha = 6 \Leftrightarrow 5\sin^2 \alpha + 13\cos^2 \alpha = 6(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 \alpha = -7\cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 7 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 7.$$

Рэспунс: 7.

13. Стереометрия.

Ын васул, каре аре форма унуй кон, нивелул ликидулуй ажунже ла 0,5. Волумул ликидулуй есте егал ку 70 мл. Кыте миллиитри де ликид требуе де адэугат пентру а умпле комплет васул?



Резолваре.

Конул мик есте асеменя челуй май маре ку коэффициентул 0,5. Волумеле корпусилор асеменя се рапортэ ка кубул коэффициентулуй де асемэнаре. Пентру ачаста волумул конулуй май маре есте де 8 орь май маре декыт волумул конулуй май мик, есте егал ку 560 мл. Прин урмаре, есте нечесар де адэугат $560 - 70 = 490$ мл де ликид.

Рэспунс: 490.

14. Валоаря чя май маре ши чя май микэ а функцией.

Гэсиць чя май маре валоаре а функцией $y = 14x - 17\text{tg}x - 3,5\pi + 11$ пе сегментул $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Резолваре.

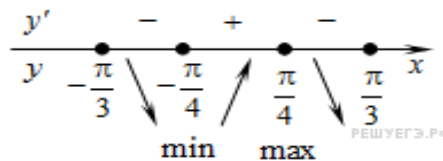
Вом гэси деривата функцией дате:

$$y' = 14 - 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{7(2\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

Вом гэси zeroуриле дериватей пе сегментул дат:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ -\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2}, \\ 2x = -\frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \\ -\frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \\ x = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вом детермина семнеле дериватей функцией пе сегментул дат ши вом арэта пе десен компортаря функцией:



Валоаря чя май маре а функцией пе сегментул дат ва фи чел май маре динтре нумереле $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ши $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Ле вом гэси:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 7\text{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{7}{2}\pi + 11 = -\frac{59}{6}\pi + 7\sqrt{3} + 11,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 14 \cdot \frac{\pi}{4} - 7\text{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}\pi + 11 = 4.$$

Вом обсерва, кэ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) > y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, деч чя май маре валоаре а функцией пе сегмент есте егалэ ку 4.

Рэспунс: 4.

15. Проблема текстүале.

Прецул фрижидерулуй ла магазин ануал се микшорязэ ку унул ши ачелашь нумэр де проченте де ла прецул пречедент. Детерминаць, ку кыте проченте ын фиекаре ан се микшора прецул фрижидерулуй, дакэ, а апэрут ын вынзаре ку прецул де 20 000 рубле, песте дой ань а фост вындут ку 15842 рубле.

Резолваре.

Фие прецул фрижидерулуй ануал се микшора ку p проченте пе ан. Атунч пентру дой ань а скэзут ку $(1 - 0,01p)^2$: де унде авем:

$$20000(1 - 0,01p)^2 = 15842 \Leftrightarrow (1 - 0,01p)^2 = 0,7921 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow_{1-0,01p>0} 1 - 0,01p = 0,89 \Leftrightarrow p = 11.$$

Рэспунс: 11.

Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь № 1

Пентру скриера резолвэрилор ши рэспунсурилор ла ынсэрчинэриле 16-21 фолосиць ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ №2. Скриець май ынтый нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините (16,17 ши а.м.д.), яр апой резолваря комплетэ ку лэмурире ши рэспунсул. Рэспунсуриле скриець клар ши читец.

16. Екүаций, системе де екүаций

а) Резолваць екүация $(2\cos^2 x + \sin x - 2)\sqrt{5\operatorname{tg} x} = 0$.

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екүацией дате, че апарцин сегментулуй $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Резолваре.

а) Примим:

$$(2\cos^2 x + \sin x - 2)\sqrt{5\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ 2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

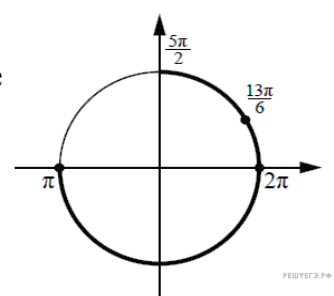
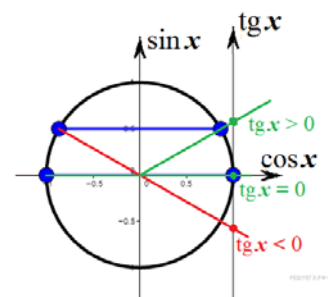
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \sin x - 2\sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \sin x(1 - 2\sin x) = 0. \end{cases}$$

де унде $x = \pi k$ сау $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Рэдэчиниле, че апарцин сегментулуй $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$: ле селектам ку ажуторул чиркумферинцей унитаре.

Примим $\pi, 2\pi$ ши $\frac{13\pi}{6}$.

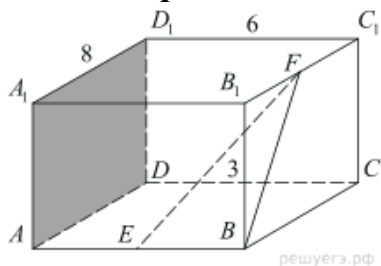
Рэспунс: а) $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\pi; 2\pi; \frac{13\pi}{6}$.



17. Унжурь ши дистанце ын спацуу

Ын параллелепипедул дрептунгик $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ла каре $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, гэсичь унжур динтре планул ADD_1 ши дряпта EF , че трече прин мижлокуриле мукиилор AB ши $B_1 C_1$.

Резолваре.



Афлэм унжур динтре дряпта EF ши планул BCC_1 , каре есте паралел планулуй ADD_1 . Пунктул B — проекция пунктулуй E пе ачест план. Унжур кэутат есте егал ку унжур EFB . Афлэм танжента унжурлуй EFB :

$$BE = \frac{6}{2} = 3, \quad B_1F = \frac{8}{2} = 4, \quad FB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\operatorname{tg} \angle EFB = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{5}.$$

Рэспунс: $\arctg \frac{3}{5}$.

18. Инекуаций, системе де инекуаций.

Резолваць системул де инекуаций: $\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \leq 2, \\ 25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0. \end{cases}$

Резолваре.

Резолвэм прима инекуацие: $\log_{x+1}(2x-5) + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \leq 2.$

Фачем субституция $y = \log_{x+1}(2x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Дакэ $\log_{x+1}(2x-5) = 1$: атунач $\begin{cases} x+1 = 2x-5, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$

Дакэ $\log_{x+1}(2x-5) < 0$: атунач

$$\begin{cases} \frac{2x-5-1}{x+1-1} < 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x-5 > 0, \\ x-1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x} < 0, \\ x > \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3.$$

Солуция примей инекуаций: $\frac{5}{2} < x < 3$ сау $x = 6$.

Резолвэм инекуация а доуа. Ымпэрчим амбеле пэрць ла 16^x :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2 \leq 0.$$

Фачем субституция $z = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Примим: $z^2 - z - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 2.$

Ревенинд ла вариабилла инициалэ, примим: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \log_{1,25} 2.$

Солуция инекуацией а доуа: $x \leq \log_{1,25} 2.$

Интерсектэм солуцииле примите. Авынд ын ведере, кэ $3 < \log_{\frac{5}{2}} 2 < 6$. гэсим
 мулцимь солуциилор системулуй: $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.
 Рэспунс: $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

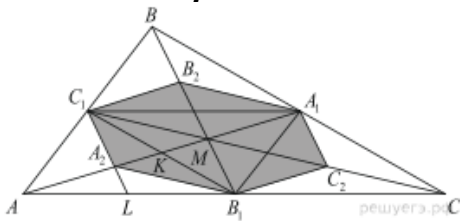
19. Проблема дин планиметрии

Медианеле AA_1 , BB_1 ши CC_1 триунгюлуй ABC се интерсектязэ ын пунктул M . Пунктеле A_2 , B_2 ши C_2 — мижлокуриле сегментелор MA , MB ши MC кореспунзэтор.

а) Демонстраць, кэ ария гексагонулуй $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ есте де доуэ орь май микэ декыт ария триунгюлуй ABC .

б) Гэсиць сума пэтрателор тутурор латурило а ле ачестуй гексагон, дакэ се куноаште, кэ $AB = 5$, $BC = 8$ ши $AC = 10$.

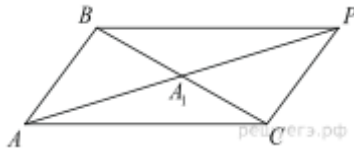
Резолваре.



а) Ария триунгюлуй A_1MB_2 есте де доуэ орь май микэ декыт ария триунгюлуй A_1MB , аша кум $MB = 2MB_2$, яр ынэлцимь, дусэ дин вырфул A_1 , ла ачесте триунгюрь есте комунэ: $S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}$.

Аналог май примим ынкэ 5 егалитэць:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ ши } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$



Адунынд ачесте егалитэць термен ку термен, примим

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$

б) Нотэм лунжимиле латурило BC , AC , AB триунгюлуй ABC прин a , b , c .

Демонстрэм формула пентру пэтратул

медианей $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Пентру демонстрацие пе прелунжиря сегментулуй AA_1 дупэ пунктул A_1 депунем сегментул $A_1P = AA_1$. Вом прими ун паралелограм $ACPB$ ку латуриле $AC = PB = b$ ши $AB = CP = c$ ши диагонале $BC = a$ ши $AP = 2AA_1$. Сума пэтрателор диагонале паралелограмулуй есте егалэ ку сума пэтрателор латурило луй:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$. де унде $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Аналог се демонстрязэ,

кэ $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, яр $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$. Сегментул C_1A_2 — линия

медие а триунгюлуй ABM , деч, $C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1$.

Жудекунд аналог, ной вом прими, кэ латуриле гексагонулуй де трей орь сынт май мичь декыт медианеле триунгюлуй

$$ABC : B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1, A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Прин урмаре, сума пэтрателор латурило гексагонулуй есте егалэ ку

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Ынлокуинд ын ачастэ формулэ лунжимиле латурилор триунгюлуй ABC , примим $\frac{63}{2}$.

Рэспунс: $\frac{63}{2}$.

20. Екуаций, инекуаций ши системеле ку параметри

Гэсиць тоате валориле луй a , пентру фиекаре динтре каре валоаря чя май маре а функцией $f(x) = |x - a| - x^2$ ну есте май микэ декыт 1.

Резолваре.

Ка валоаря функцией дате сэ фие ну май микэ декыт 1, есте нечесар ши суфичиент, ка еа ын карева пункт сэ примяскэ валоаря 1. Де фапт, $f(a) = -a^2 < 1$. Дакэ валоаря ей чя май маре ну есте май микэ декыт унитатя, атунч дупэ континуитате ын карева пункт ва фи валоаря уну. Ынсэ дакэ валоаря чя май маре есте май микэ декыт унитатя, атунч валоаря 1 ну поате фи примитэ. Аша дар, адучем проблема ла — пентру че a аре рэдэчинь екуация $|x - a| = x^2 + 1$. Аша кум $x^2 + 1 > 0$, ачастэ екуацие есте екивалентэ ку тоталитатя

$$\begin{cases} x - a = x^2 + 1, \\ a - x = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 + a = 0, \\ x^2 + x + 1 - a = 0. \end{cases}$$

Ачастэ тоталитате аре солуций дакэ $1 - 4(1 + a) \geq 0$ сау дакэ $1 - 4(1 - a) \geq 0$, адикэ пентру $a \leq -\frac{3}{4}$ сау $a \geq \frac{3}{4}$.

Рэспунс: $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; \infty\right)$.

21. Нумереле ши проприетэциле лор.

Сынт дате n нумере натурале диферите, че алкэтуеск прогресия аритметикэ ($n \geq 3$).

а) Поате оаре сума тутурор нумерелор дате сэ фие егалэ ку 14?

б) Каре есте чя май маре валоаре а луй n , дакэ сума тутурор нумерелор дате есте май микэ декыт 900?

в) Гэсиць тоате валориле посибиле луй n , дакэ сума тутурор нумерелор дате есте егалэ ку 123.

Резолваре.

а) Да, поате. Нумереле 2, 3, 4, 5 формязэ прогресие аритметикэ, сума лор есте егалэ ку 14.

б) Фие a — примул термен, d — рация, n — нумэрул де термень ай прогресией, атунч сума лор есте егалэ ку $\frac{2a + d(n-1)}{2}n$. Ка нумэрул де термень сэ фие чел май маре, примул термен ши рация требуе сэ фие чей май мич. Фие сынт егаль ку 1, атунч дупэ кондицие $\frac{n(n+1)}{2} < 900$. Чя май маре солуцие натуралэ а ачестей инекуаций $n = 41$. Астфел де резултат се примеште ла прогресия $1 + 2 + \dots + 41 = 861$.

в) Пентру сума терменилор прогресией аритметиче авем:

$$\frac{2a + d(n - 1)}{2}n = 123 \Leftrightarrow (2a + d(n - 1))n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Ын аша мод, нумэрул терменилор прогресией n есте дивизорул нумэрулуй 246. Дакэ $n \geq 41$, агунч партя дряптэ есте май маре декыт 246: $(2a + d(n - 1))n \geq 42 \cdot 41 > 246$; прин урмаре, $n < 41$. Прекум $n \geq 3$ примим, кэ $n = 3$ сау $n = 6$. Прогресий дин трей ши шасе термень ку сума 123 екзистэ: де екземплу, 40, 41, 42 ши 3, 10, 17, 24, 31, 38.
Рэспунс: а) да; б) 41; в) 3; 6.